

GeoGebra 數學 e 世界

– 試算表、符號運算、統計、微積分

蔡炎龍

政治大學應用數學系

明德高級中學

- 1 未完的程式部份
- 2 微積分相關
- 3 試算表與統計
- 4 符號計算系統

未完的程式部份

亂數指令

GeoGebra 有個亂數指令, 如

RandomBetween[-5,5]

就是產生 -5 到 5 的整數亂數。

練習

做一個按鈕, 按下去會以亂數生出一個點 A , 使其座標在 $-5 \leq x, y \leq 5$ 。

執行指令

執行一個指令字串

GeoGebra 有個執行一個集合指令的指令：

```
Execute[{"command1","command2"}]
```

你可能會覺得奇怪，我們直接執行不就好了？為什麼要弄得那麼複雜？那是因為，有時我們需要想辦法「做」出指令的「字串」。

做出一系列的點

練習

- 1 令 $n = 0$ 。
- 2 每按一個鈕, 就讓 $n = n + 1$ 。
- 3 亂數產生點 $A_n = (n, k)$, 其中 $-5 \leq k \leq 5$ 。

我們要做的指令是像這樣, 比如說要加 A_7 這個點, 下這個指令:

$A_7 = (7, \text{RandomBetween}[-5, 5])$

做出一系列的點

重點

① 記得 $A_n = (n, \text{RandomBetween}[-5, 5])$ 裡紅色的 n 是會變的。

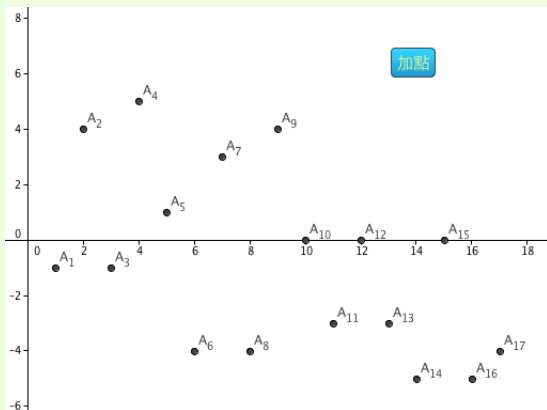
② 我們要下的指令變成字串是

$"A_{"+n+"} = (" + n + ", \text{RandomBetween}[-5, 5])"$

③ 用 `Execute` 執行會變成

`Execute[{"A_{"+n+"} = (" + n + ", RandomBetween[-5, 5])"}]`

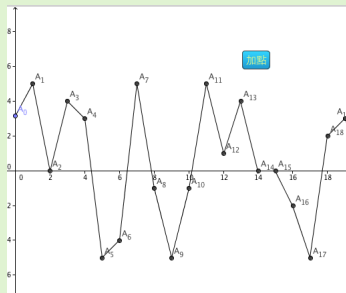
做出一系列的點



兩點間連線

練習

先在 y 軸加一個起始點 A_0 , 我們是不是可以把剛剛的程式改一下, 每加入新的點就和前一點連成一線段?



微積分相關

GeoGebra 的微分

試求下列函數的微分：

- 1 $f(x) = \exp(x)$
- 2 $f(x) = \log(x)$
- 3 $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$

注意

- 1 GeoGebra 4.2 版起可以做符號運算，所以會算「正確」解。
- 2 GeoGebra 的 \log 是自然對數，以 10 為底要用 \log_{10} 。

割線與切線

- 1 給一個函數 f , 在 x 軸上放一點 a , 令 $P = (a, f(a))$ 。
- 2 設 h 數值滑桿, 做一點 $Q = (a + h, f(a + h))$ 。
- 3 求 PQ 割線。
- 4 求 $y = f(x)$ 圖形在 P 點切線。
- 5 「看見」微分的動作。(h 靠近 0)

漸近線

水平/垂直漸近線

水平漸近線 若

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b,$$

則 $y = b$ 為函數圖形 $y = f(x)$ 之一水平漸近線。

垂直漸近線 若

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty, \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty,$$

則 $x = a$ 為函數圖形 $y = f(x)$ 之一垂直漸近線。

漸近線

練習

- 在 y 軸上放一個點，再求過此點與 x 軸平行的直線 L_1 。
- 在 x 軸上放兩個點，過此兩點分別作與 y 軸平行的直線 L_2, L_3 。
- 找一個以 L_1, L_2, L_3 為漸近線的函數。

泰勒展開式

指令

`TaylorPolynomial[函數, 展開點, 階數]`

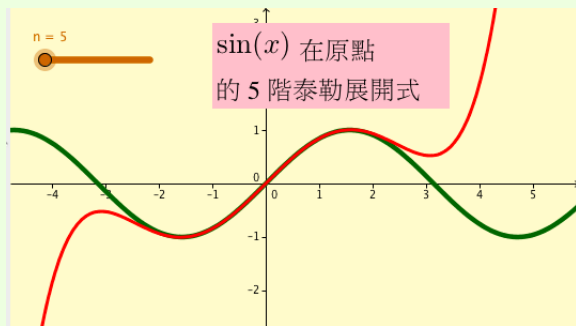
例如我們想算 $\sin(x)$ 對原點, 5 階泰勒展開式即:

`TaylorPolynomial[sin(x),0,5]`

泰勒展開式

練習

做一個 n 的正整數數值滑桿，做 $\sin(x)$ (或其他函數) 在某一點的泰勒展開式。拉動數值滑桿，看看有什麼變化？

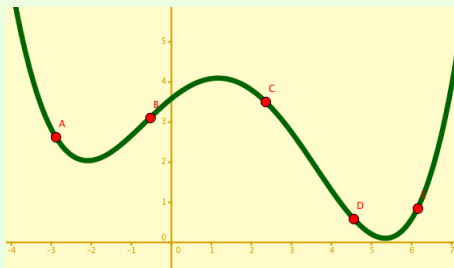


做出更多樣的函數

重點

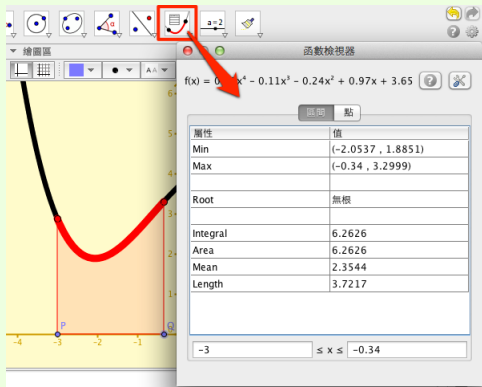
我們可以用 **FitPoly** 指令求一個過給定點的多項式函數：

FitPoly[點集, 多項式次數 (點的個數減一)]



絕對極值

我們可以用「函數檢視器」找出一個區間的絕對極值、積分、平均、長度等等。

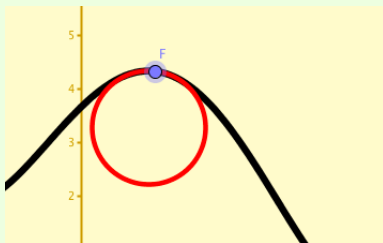


密切圓

重點

有 “Kissing Circle” 之稱的「密切圓」 (*Osculating Circle*), 在 *GeoGebra* 上很容易做出來:

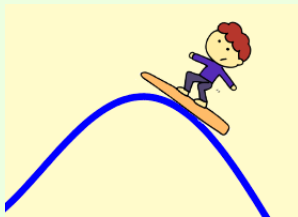
OsculatingCircle[點, 函數或曲線]



衝浪的人

練習

在一個函數上，我們想放上一個「衝浪的人」，讓這位衝浪的人能在函數的「海浪」上移動。我們怎麼才能讓這位衝浪的人看起來自然呢？



基本積分

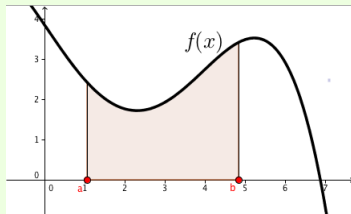
積分指令

`Integral`[函數, 起始點, 終點]

基本積分

練習

- 自訂一個函數 $f(x)$ 。
- 在 x 軸上做兩個點 a, b 。
- 拉動這兩個點，即可求出 $f(x)$ 從 a 積分到 b 的結果。

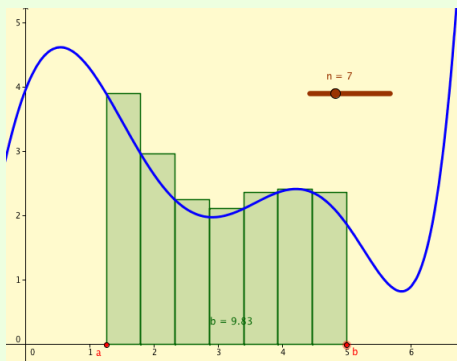


看見積分

上和和下和

UpperSum[函數, 起始點, 終點, 用幾塊長方型]

LowerSum[函數, 起始點, 終點, 用幾塊長方型]



看見積分

練習

- 作一個整數的數值滑桿 n 。
- 畫一個函數 $f(x)$ 。
- 在 x 軸上放兩個點 a, b 。
- 求函數 $f(x)$ 從 a 到 b 的上和或下和。

試算表與統計

試算表

- 1 在數學實驗中很重要的試算表功能, 在 3.2 版時初登場。
- 2 不只是數字, 「幾何」也可以試算 (試試輸入 $(2, 3)$)。
- 3 “紀錄到試算表” 功能, 方便紀錄點到試算表中。

基本試算表練習

這裡我們練習基本試算表的使用。

- ① 和一般試算表相同的是, GeoGebra 可以找出 pattern (看示範)。
- ② 一般試算表沒有的, GeoGebra 可以試算幾何物件, 也可以找出 pattern (看示範)。

冰雹數列

冰雹數列

一個數列假設第 n 項為 a_n , 下一項 a_{n+1} 以下列方式決定:

- 若 a_n 為偶數, 則 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ 。

冰雹數列

冰雹數列

一個數列假設第 n 項為 a_n , 下一項 a_{n+1} 以下列方式決定:

- 若 a_n 為偶數, 則 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ 。
- 若 a_n 為奇數, 則 $a_{n+1} = 3 \times a_n + 1$ 。

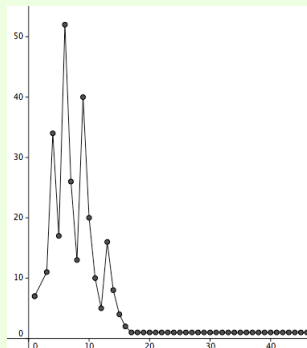
一些指令

- `segment[A,B]`: 畫出點 A , B 決定的線段
- `if[condition,true,false]`: if 判斷式

練習

練習

用試算表計算冰雹數列，並畫出圖形。



亂數資料

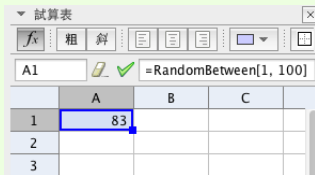
現在我們想做基本統計，我們先在試算表中輸入一些數字來做，不過這次我們用酷一點的方式：自動產生一堆數字。

練習

- 在試算表 A1 格輸入 `RandomBetween[1,100]`
- 把 A1 copy 到之後若干格。

亂數資料

在儲存格輸入函數時，我們也可以用「函數輸入」輔助功能，這樣有點像在命令列輸入函數，不用記得完整名稱。



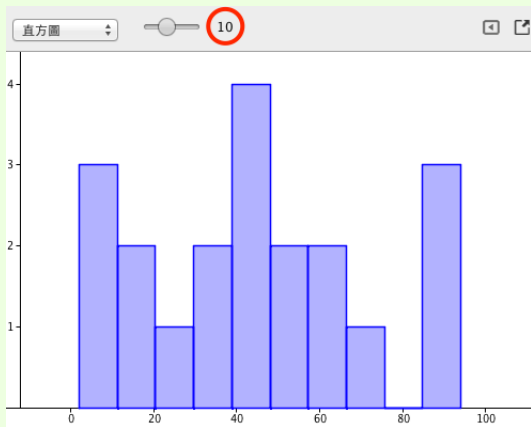
基本統計

我們只要選「單變數分析」很容易得到基本的統計結果。

	A	B	C	D	E
1	57				
2	44				
3	93				
4	45				
5	43				
6	26				
7	38				
8	38				
9	88				
10	17				
11	18				
12	59				

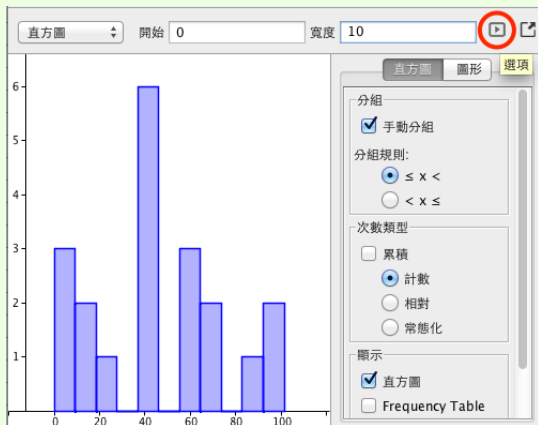
基本統計：直方圖

事實上我們得到的是直方圖，可以用數值滑桿選擇要分多少組。



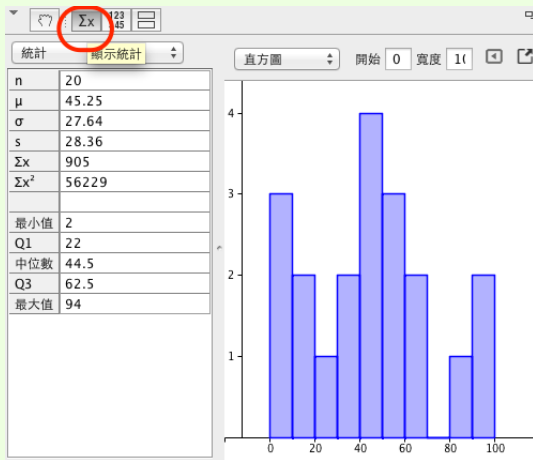
基本統計：直方圖

按下「選項」鈕，我們更可以手動調整分組方式。



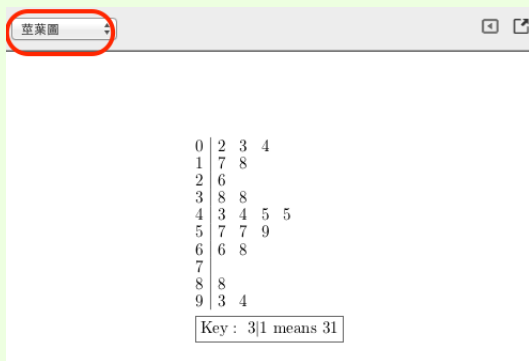
基本統計：統計資料

按下「顯示統計」鈕，可以看基本的統計資料。



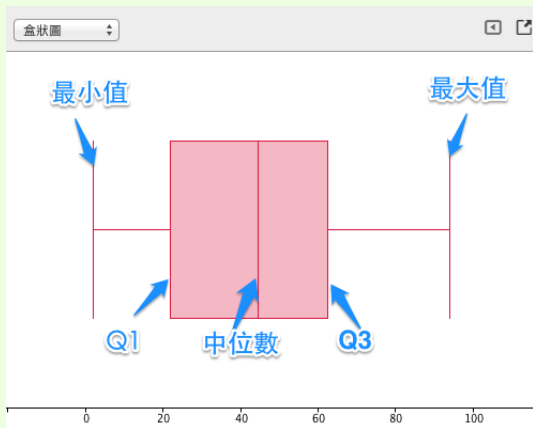
基本統計：莖葉圖

我們可選不同的圖表，比如說「莖葉圖」。



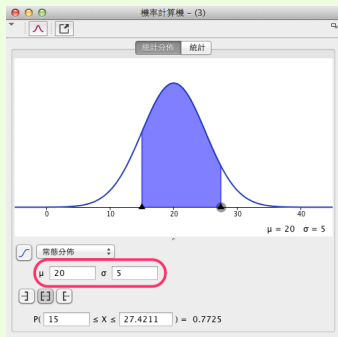
基本統計：盒狀圖

「盒狀圖」也非常容易。



機率計算機

在試算表狀態下，選用「機率計算機」我們可以很容易看到一個機率分佈長什麼樣子，可以改一些參數，更可以算從多少到多少發生機率為何。



簡單迴歸

給定一些在平面上的點，我們準備做：

- 線性迴歸
- n 次多項式，最接近這些給定的點者。

輸入資料

輸入任意 x, y 座標。

	A	B
1	1	3
2	2	-1
3	3.1	2
4	4.3	-4
5	5	1

製作點集

選擇所有座標資料，按住滑鼠右鍵，選**新增點集**。



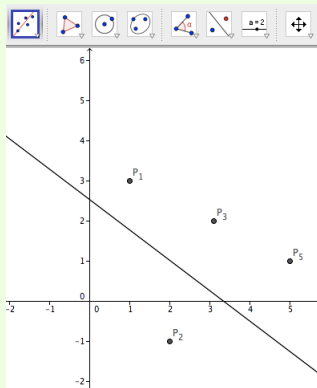
	A	B	C
1	1	3	
2	2	-1	
3	3.1	2	
4	4.3	-4	
5	5	1	
6			
7			
8			
9			
10			
11			

Context menu options:

- 複製
- 貼上
- 剪下
- 新增點集**
- 新增矩陣

畫迴歸線

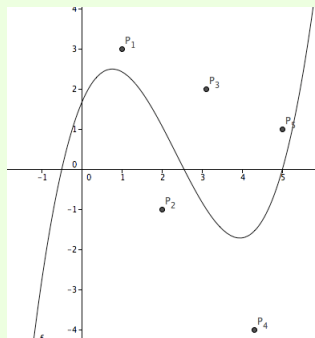
選擇迴歸線工具，並框起所要的點，畫出迴歸線。



用多項式逼近

輸入以下指令, 用 3 次多項式逼近這些點:

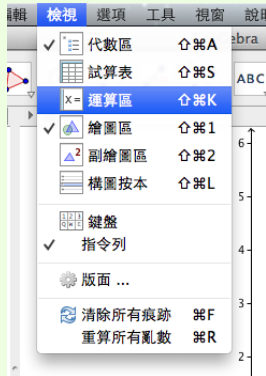
FitPoly[Set1,3]



符號計算系統

進入符號運算系統

GeoGebra 4.2 後加入符號運算，使用時選「檢視」>「運算區」。



符號運算系統

符號型計算事實上就是平常數學課堂上的計算!

▶ 運算區	
1	$1/2 + 1/3$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \frac{5}{6}$
2	$\text{Integral}[\sin(x)]$
<input type="radio"/>	$\rightarrow -\cos(x) + c_1$
3	$\text{Derivative}[\ln(x)]$
<input type="radio"/>	$\rightarrow x^{-1}$
4	265
<input type="radio"/>	Factor: $5 \cdot 53$
5	$(a+b)^3$
<input type="radio"/>	Expand: $a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$

小技巧：特殊符號

GeoGebra 有個神秘的按鍵：

Windows Alt

Mac Control (Ctrl)

我們可以按住這神秘按鍵，再按下一另一個鍵，就可以打出許多特殊符號，比如說...

小技巧：特殊符號

Alt (Ctrl) +	符號	說明
o	\circ	角度
p	π	
e	e	
i	i	複數的 i
a	α	
t	θ	

符號運算工具

The image shows the toolbar of the GeoGebra CAS view with several tools highlighted by red circles and labeled with yellow boxes. Blue arrows point from the labels to the corresponding tools.

- 數值計算** (Numerical Calculation): Points to the \approx (approximate) button.
- 代入** (Substitution): Points to the $x =$ button.
- 方程式求解** (Equation Solving): Points to the $x \approx$ button.
- 因數分解** (Factorization): Points to the $\frac{15}{3.5}$ button.
- 展開** (Expansion): Points to the $(())$ button.

Other visible tools include the checkmark, the ∂ (partial derivative) button, and the integral button. A dropdown menu for the ∂ button shows options for 導數 (Derivative) and 積分 (Integral). The main workspace shows the expression $(a+b)^3$ and its expansion $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

小技巧: 快速引用之前輸入輸出

輸入 要再用前一個輸入, 按 “=” 即可。

輸出 要用某一個輸出, 去點一下該輸出即可。

問題: 我們要引用某個 (非前一次) 輸入該如何?