

GeoGebra 數學 e 世界

– 數列、程式、微積分

蔡炎龍

政治大學應用數學系

明德高級中學

- 1 數列其實很厲害
- 2 指令和第二繪圖區
- 3 輸入欄位
- 4 GeoGebra 程式初步

數列其實很厲害

標準的數列用法

我們假設要用 n 做為數列的檢索值，基本的 `sequence` 指令用法如下。

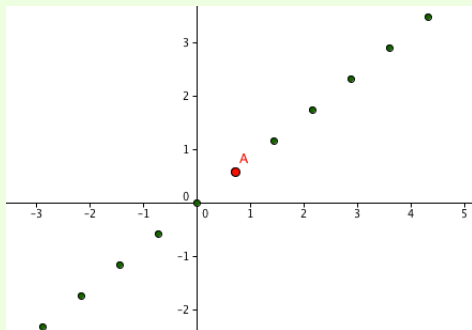
Sequence[以 n 為變數的物件, n , 起始值, 終止值]

例如: `Sequence[2*n,n,1,10]` 為前十個偶數。

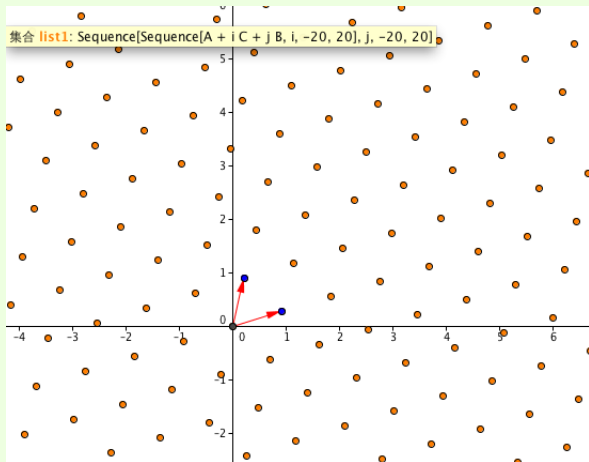
做個網格出來

練習

給定一個點 A , 我們想以 OA 向量生出其它在 OA 直線上的各點。即找出所有 $n \cdot A$ 的點, 其中 n 是整數。



做個網格出來

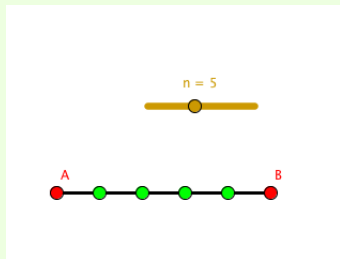


做個網格出來

參考答案: `Sequence[Sequence[m * A+n * B,m,-20,20],n,-20,20]`

分段

- 1 做一個正整數數值滑桿 n 、及一線段 AB 。
- 2 拉動數值滑桿, AB 就自動分成 n 段。



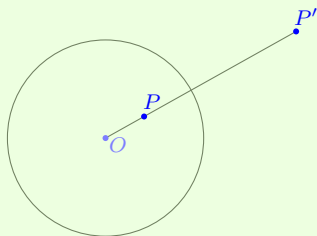
分段

這裡有意思的是, Sequence 裡不一定要是數字, 物件也可以!

Sequence[A+(B-A)/nk,k,1,n-1]

指令和第二繪圖區

圓的對稱 (反演)



定義

設圓 C 的圓心為 O , 半徑為 R 。在平面上的一個點 P , 我們說 P' 為 P 對此圓 C 的對稱點 (反演), 如果以下的條件成立:

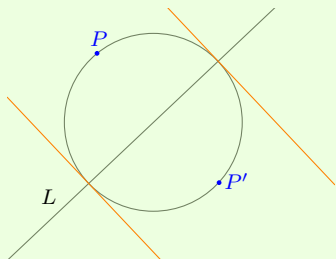
- 1 P 在 OP 射線上。
- 2 $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = R^2$ 。

圓對稱和直線對稱的關連性

我們可以把一條直線看成「半徑無窮大」，在「無窮圓處相連」的圓。

練習

給定一條直線 L ，一個點 P ，求出 P 對 L 的對稱點。做任意過 P 、 P' 的圓或直線，觀察此圓或直線是否和 L 垂直。



圓對稱和直線對稱的關連性

因此我們可以做一個「新的」直線對稱定義。

定義

L 為平面上一直線, P 為平面上一點。我們說 P' 和 P 對稱於直線 L , 若對所有過 P, P' 的圓 (直線), 都與 L 正交。

我們可以完全模仿這個定義, 也給圓對稱新的定義。

定義

C 為平面上一個圓, P 為平面上一點。我們說 P' 和 P 對稱於圓 C , 若對所有過 P, P' 的圓 (直線), 都與 C 正交。

試玩反演

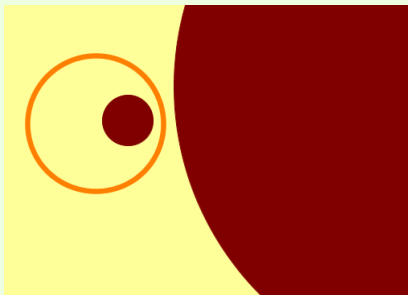
練習

作一個圓 C , 再作一直線 L 。作這條直線 L 的反演, 試著移動 L , 看看會反演出什麼不同的結果? (尤其注意 L 過圓心時)

試玩反演

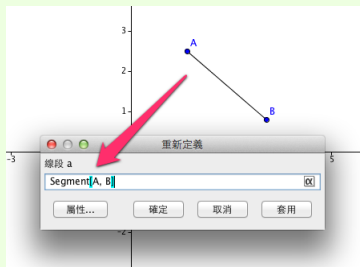
練習

在 *GeoGebra* 中，我們不但可以對一個點反演，也可以把一個物件上所有點都做反演。試試看會不會反演出一些有趣的圖形。



GeoGebra 的指令

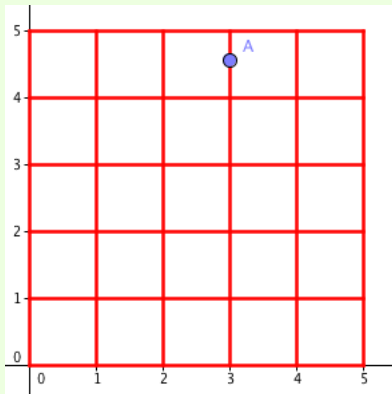
- 1 GeoGebra 的物件，不一定要從工具選單選出，也可以用下指令的方式。
- 2 指令只要在代數區找到對應物件，點兩下就可以看到怎麼定義的。



做出一個網格

練習

使用之前學的 **sequence**, 做出如下的網格。



做出一個網格

參考解：

- 1 `Sequence[Segment[(0,n),(5,n)],n,0,5]`
- 2 再用同樣的方法，做出垂直的五條線段。

重點

如果我們把一個點放在橫線 (或直線上)，拉拉看這個點，或讓它「開始動畫」，我們會發現它會走過所有的橫線 (或直線)!

做出一個網格

練習

假設我們橫線和直線的串列分別叫 `list1` 和 `list2`。如果我們要合併成一個串列, 可以用

`Union[list1,list2]`

這時我們再把一個點放在網格上, 拉拉看, 或選「開始動畫」, 會發生什麼事?

做出一個網格

練習

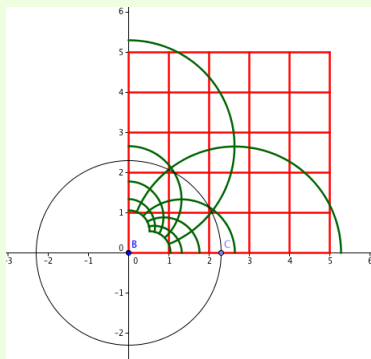
如果你都完成了, 可以試著以下更有彈性的改變:

- 1 試著給定一個點, 做網格的左下角, 拉動這點, 網格就會跟著移動。
- 2 試用一個數值滑桿, 控制網格大小。

做網格的反演

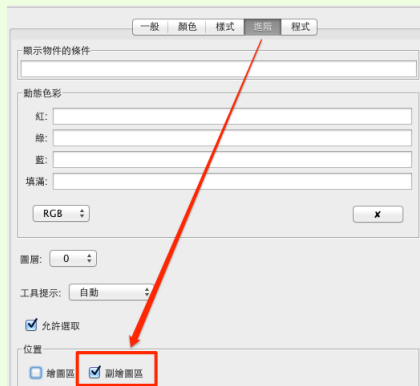
練習

作一個圓，求我們做出網格對此圓的反演。這樣子有點亂，我們可以把反演的結果送到「副繪圖區」。



副繪圖區

把一個物件送到副圖區的方法是開啓它的屬性，在「進階」中選「副繪圖區」。



輸入欄位

複利計算

複利計算公式

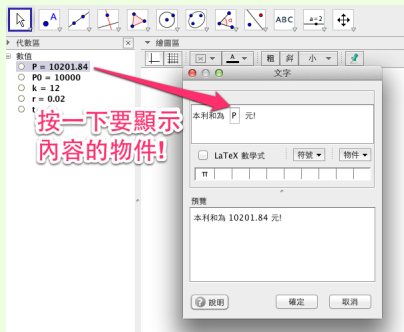
設本金 P_0 , 利率 r , 每年複利 k 次, 經 t 年後本利和 P 為

$$P = P_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

- 1 設 $P_0 = 10000$ (或做一個 P_0 的數值滑桿)。
- 2 設利率 $r = 0.02$ 。
- 3 設每年複利次數為 $k = 12$ 。
- 4 設 $t = 1, 2, 3$ 等年份試驗。
- 5 計算 P 。

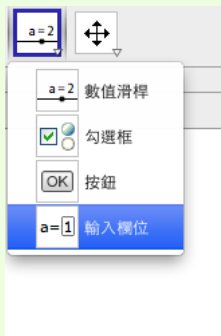
顯示結果

GeoGebra 偷偷算完本利和後，都是放在代數區。我們想讓結果大大顯示出來，可以用「**插入文字**」工具：打入任何我們想顯示的字，而要顯示內容（本利和 P ），就點一下即可。



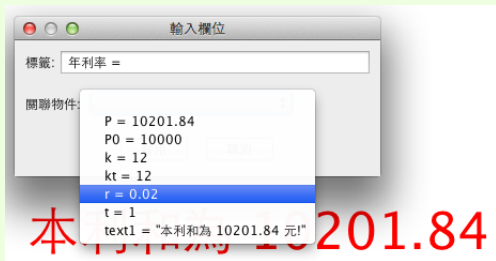
直接改變利率

我們希望使用者可以直接改變利率，可以用「**輸入欄位**」功能。



直接改變利率

- 在「**標籤**」中輸入提示，如我們可以輸入「**年利率 =**」。
- 接著在關聯物件中連到我們要對應的，比如我們的例子是連到 r 。



直接改變利率

之後我們就可以直接在輸入框中改變年利率，而且 GeoGebra 馬上會呈現對應的本利和！

年利率 =

本利和為 11956.18 元!

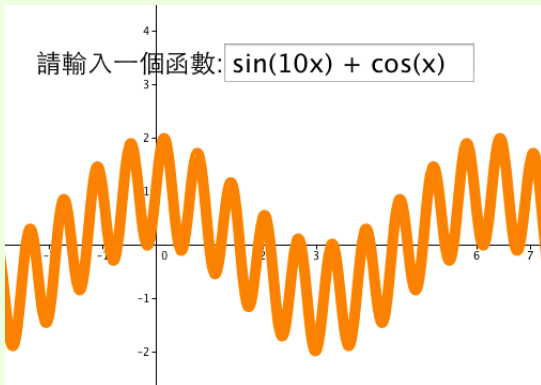
輸入框大小

我們可以改變提示字的大小、顏色 (如同一般設定), 也可以改輸入欄位的寬度: 在我們做好年利率輸入欄位按滑鼠右鍵, 選「屬性」, 在「欄位寬度」打入我們要的寬度即可。



輸入函數

事實上輸入欄位可關聯各式物件，比如說關聯到函數，就可以自由讓使用者改變函數！

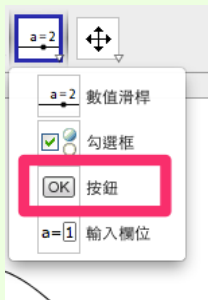


GeoGebra 程式初步

設定函數的粗細

- 1 先畫一個函數 $f(x)$ 。
- 2 令 $n = 1$ 。

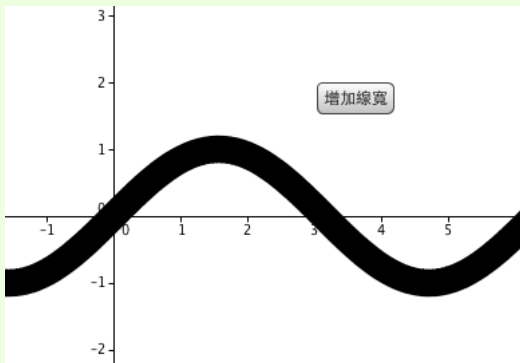
我們備做一個按鈕，每按一下就增加線的厚度。畫好函數後請選「**按鈕**」工具。



設定函數的粗細

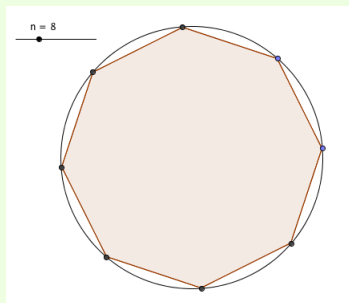


設定函數的粗細



正 n 邊型的外接圓

- 1 先做一個圓。
- 2 再做一個 n 的整數數值滑桿, $3 \leq n \leq 20$ 。
- 3 拉動數值滑桿, 就會做出此圓內接正 n 邊形。

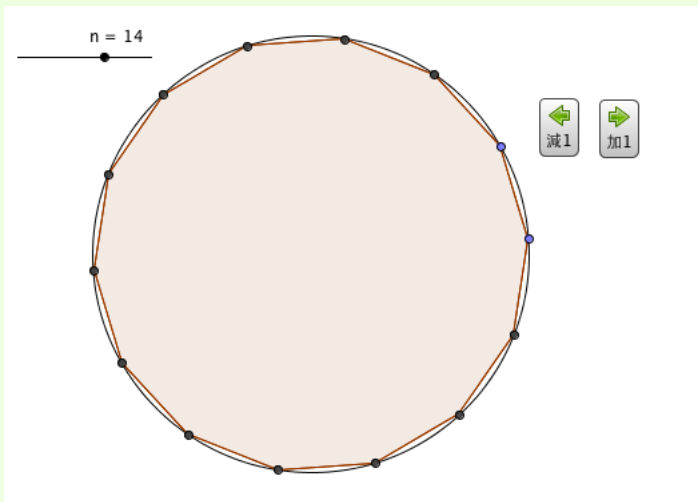


正 n 邊型的外接圓

提示

- 1 先在圓上放置一點。
- 2 使用「**旋轉工具**」，將點轉 $360^\circ/n$ 。
- 3 使用「**正多邊形**」工具，做正 n 邊形。

正 n 邊型的外接圓



亂數指令

GeoGebra 有個亂數指令, 如

RandomBetween[-5,5]

就是產生 -5 到 5 的整數亂數。

練習

做一個按鈕, 按下去會以亂數生出一個點 A , 使其座標在 $-5 \leq x, y \leq 5$ 。

抽號

練習

做一個抽號程式 – 按個按鈕，就會抽一個比如 1 到 50 間的數字。



抽號

參考作法：

- 1 先設 $a = 1$ 或任意數字。
- 2 使用「插入文字」，把 a 顯示在主畫面，並放大美化一下。
- 3 做一個按鈕，程式碼為

$a = \text{RandomBetween}[1, 50]$

抽號

改進想法

- 1 亂數的範圍可讓使用者用數值滑桿或輸入欄位功能設定。
- 2 可同時抽三個不同數字。
- 3 再抽完所有數字之前，數字都不會重覆。